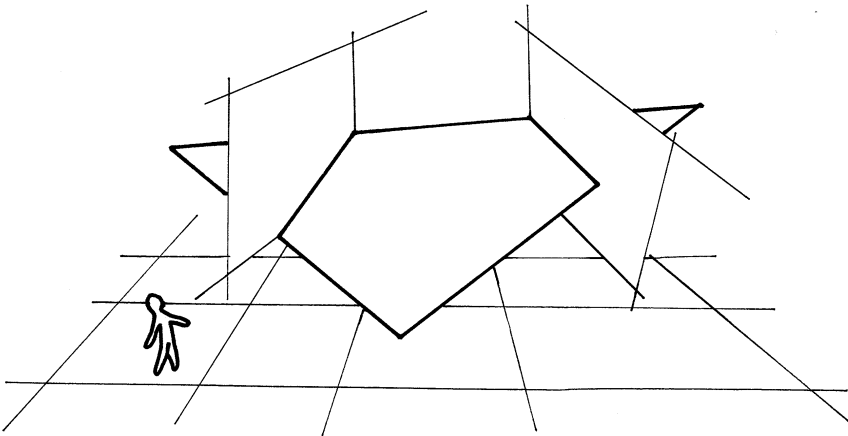


4 Die Epipolargeometrie



4.1 Klassifizierung von Stereosystemen

Nachdem in den vorangegangenen Kapiteln auf die mathematischen Zusammenhänge bei einer Kamera eingegangen wurden, findet nun eine ausführliche Betrachtung der geometrischen Beziehung zwischen zwei unterschiedlichen Kameras statt. Kameraanordnungen mit zwei Kameras werden Stereosysteme genannt und lassen sich bezüglich ihrer räumlichen Anordnung in zwei grundsätzliche Klassen unterscheiden (Abb. 4.1). Dies ist zum Einen das achsparallele Stereosystem, das sich durch eine parallele Ausrichtung der optischen Achsen beider Kameras auszeichnet. Zum Anderen ist die konvergente Anordnung zu nennen, die sich i. A. durch eine Ausrichtung der optischen Achsen auf einen Konvergenzpunkt auszeichnet. Im ersten Fall ergeben sich einfachere mathematische Zusammenhänge, die im folgenden Abschnitt dargelegt werden. Allerdings weist der achsparallele Aufbau erhebliche Einschränkungen auf, da die Kameras nicht auf ein bestimmtes Objekt ausgerichtet sind. Abhängig von der Tiefenstruktur der Szene kann mit solch einem Aufbau die Szene u. U. gar

nicht vollständig von beiden Kameras erfasst werden. In der Praxis wird üblicherweise der konvergente Aufbau verwendet und deshalb auch als allgemeine Stereogeometrie bezeichnet. Allerdings kann jede konvergente Kameraanordnung durch eine virtuelle Drehung der Kameras in ein achsparalleles Stereosystem überführt werden. Dieser Prozess wird Rektifikation genannt und später ausführlich in Kapitel 7 behandelt.

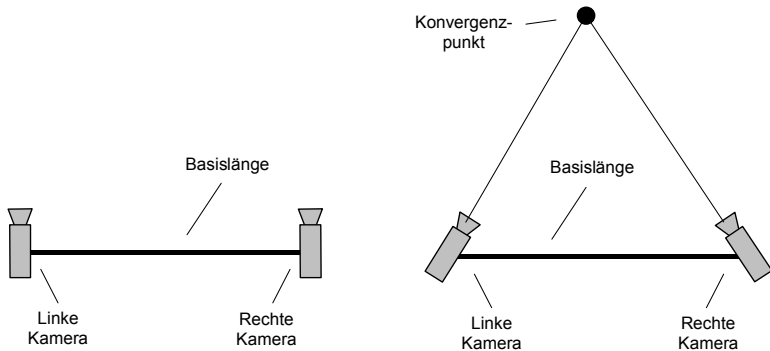


Abb. 4.1. Achsparalleles Stereosystem (links), konvergente Anordnung (rechts)

4.2 Achsparallele Stereogeometrie

Das achsparallele Stereosystem zeichnet sich durch zwei Kameras aus, die nur horizontal verschoben und deren Koordinatensysteme nicht gegeneinander verdreht sind. In Abb. 4.2 ist die Frontsicht auf ein achsparalleles System dargestellt. Die Bildebenen I_1 und I_2 sind parallel und die beiden optischen Zentren C_1 und C_2 sind nur horizontal verschoben.

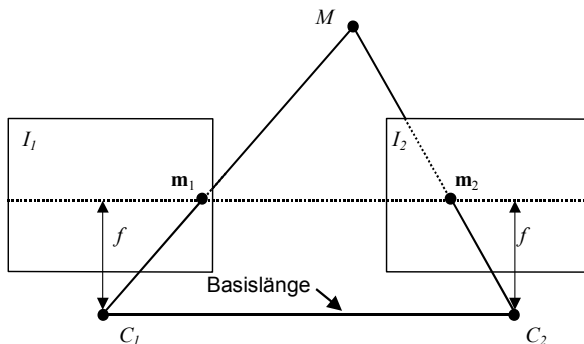


Abb. 4.2. Frontsicht auf eine achsparallele Stereogeometrie

Der Abstand zwischen den beiden optischen Zentren wird Basislänge B genannt und die Verbindungsgerade Basislinie (engl. *baseline*). Die Brennweite f legt den Abstand der beiden Brennpunkte zu ihren Bildebenen fest und wird für beide Kameras als identisch vorausgesetzt. Ein 3-D-Punkt M wird somit über die beiden optischen Zentren in die Abbildungen \mathbf{m}_1 und \mathbf{m}_2 projiziert. Da bei einem achsparallelen Stereosystem die Bildzeilen identisch sind, führt die unterschiedliche Perspektive der Kameras hinsichtlich des 3-D-Punktes M zu einem rein horizontalen Versatz in der Abbildung. Dieser Unterschied wird als Disparität δ bezeichnet und stellt die relative Verschiebung der Abbildungen \mathbf{m}_1 und \mathbf{m}_2 des 3-D Punktes M bei zwei unterschiedlichen Ansichten I_1 und I_2 dar. In Abb. 4.3 sind die Verhältnisse nochmals in einer Aufsicht dargestellt.

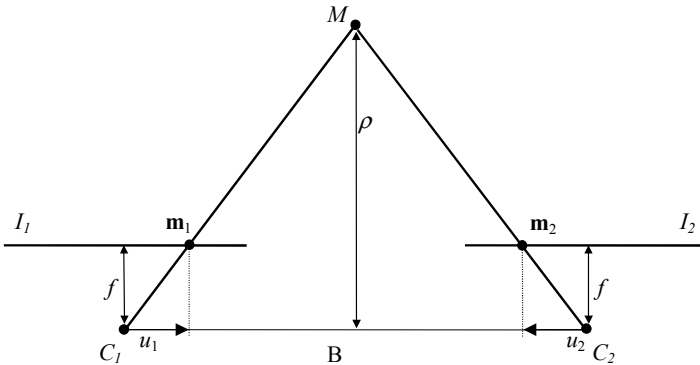


Abb. 4.3. Aufsicht auf eine achsparallele Stereogeometrie

Die Disparität wird i. A. in Bildkoordinaten berechnet, so dass die Einheit Pixel ist:

$$\delta = u_1 - u_2 \quad (4.1)$$

Durch Anwendung des Strahlensatzes muss das Verhältnis zwischen dem Abstand ρ des Punktes M zur fokalen Ebene und der Brennweite f gleich dem Verhältnis der Basislänge B des Stereokamerasystems zur Disparität $\delta \cdot d_u$ (in mm) sein. d_u bezeichnet hierbei die Breite eines CCD-Elementes und stellt den Skalierungsfaktor dar, der die Disparität in Pixel in die Einheit mm umrechnet.

$$\frac{\rho}{f} = \frac{B}{\delta \cdot d_u} \quad (4.2)$$

Aus der vorgenannten Beziehung lässt sich der Abstand ρ eines Punktes M von der Kamera aus den konstanten Kameraparametern f , B und d_u sowie der Disparität δ berechnen.

$$\rho = \frac{B \cdot f}{\delta \cdot d_u} \quad (4.3)$$

Damit stellt die Disparität ein Maß für die Raumentiefe des 3-D-Punktes M dar und verhält sich umgekehrt proportional zu ihr. Für Punkte im Unendlichen muss also die Disparität gegen Null konvergieren. Für diesen einfachen Fall kann also direkt eine 3-D-Rekonstruktionsvorschrift abgeleitet werden (siehe Gl. 4.3). Die Voraussetzung ist jedoch die parallele Ausrichtung der optischen Achsen, also keine Rotation der Kameras zueinander, eine rein horizontale Verschiebung und die gleiche Brennweite f .

4.3 Die allgemeine Stereogeometrie

Im Gegensatz zum achsparallelen Fall sind bei der allgemeinen Stereogeometrie, auch Epipolargeometrie genannt, die beiden Kameras nicht nur verschoben, sondern auch noch zueinander gedreht. Diese allgemeine Positions- und Orientierungsänderung wird durch folgende Koordinatentransformation ausgedrückt.

$$M_{C_2} = \mathbf{R}M_{C_1} + \mathbf{t} \quad (4.4)$$

Dabei stellt \mathbf{R} eine orthogonale Drehmatrix und \mathbf{t} den dreidimensionalen Verschiebungsvektor dar. Das Weltkoordinatensystem wird bei dieser Definition in das optische Zentrum der Kamera 1 gelegt. Bevor auf die mathematische Herleitung der Geometrie zwischen zwei Kameras eingegangen wird, soll eine anschauliche Erläuterung der wesentlichen Kenngrößen der Epipolargeometrie folgen.

Analog zum achsparallelen System wird die Verbindungsgerade zwischen den beiden optischen Zentren Basislinie genannt. Aufgrund der gedrehten Bildebenen schneidet diese Gerade jedoch beide Bildebenen. Diese Schnittpunkte werden *Epipole*, \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 , genannt und ihre Lage in den Bildebenen ist nur durch die Anordnung der Kameras zueinander bestimmt. Die Epipole können auch als Projektion der optischen Zentren in die jeweils andere Bildebene aufgefasst werden. Der 3-D-Punkt M und die beiden Brennpunkte spannen eine Ebene auf, die als *Epipolarebene* π bezeichnet wird (siehe Abb. 4.4). Da die Abbildungen \mathbf{m}_1 und \mathbf{m}_2 auf den optischen Strahlen liegen, sind auch diese Teil der Ebene π . Die Epipolarebene schneidet nun die beiden Bildebenen in zwei Schnittgeraden, die

Epipolarlinien, l_1 und l_2 , genannt werden. Stellt man sich nun die beiden Sehstrahlen des 3-D-Punktes in die beiden Kameras als Gummiband vor, und bewegt man diesen Punkt innerhalb der Epipolarebene, so führt dies zu unterschiedlichen Abbildungen in den beiden Bildebenen, wobei diese immer auf den Epipolarlinien liegen. Ein weiteres Gedankenexperiment ist folgendes: Lässt man den 3-D-Punkt M entlang eines Sehstrahles z. B. in Richtung Kamera 1 laufen, so ergibt sich immer die gleiche Abbildung m_1 in Kamera 1, während in Kamera 2 die Abbildung m_2 entlang der Epipolarlinie l_2 in Richtung des Epipols e_2 wandert. Der Sehstrahl von jedem 3-D-Punkt in eine Kamera liefert als Projektion in der anderen Kamera die entsprechende Epipolarlinie. Folglich muss auch für jeden Bildpunkt in der einen Kamera in der anderen Kamera eine Epipolarlinie existieren, auf der alle möglichen Korrespondenzpunkte liegen.

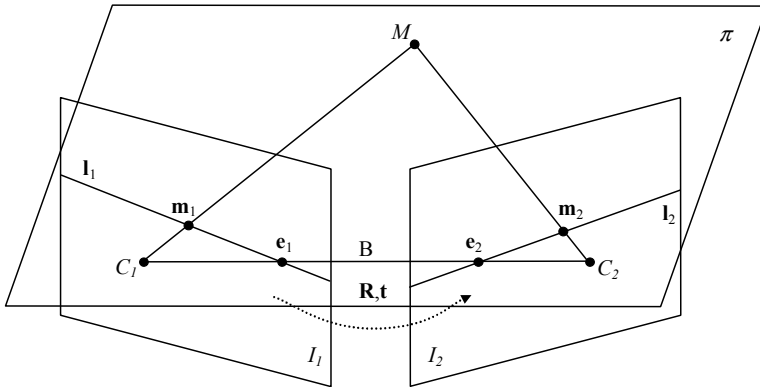


Abb. 4.4. Allgemeine Epipolargeometrie

Da die beiden Brennpunkte in der Epipolarebene liegen, ist auch die Verbindungsgerade, die Basislinie, Teil der Epipolarebene. Rotiert man nun die Epipolarebene um die Basislinie, so kann die Gesamtheit aller 3-D-Punkte im Raum erfasst werden. Für jede neue Position ergibt sich jedoch wieder ein neues Paar von Epipolarlinien. Da die Epipole unabhängig von der Position des 3-D-Punktes sind, schneiden sich alle Epipolarlinien in den jeweiligen Epipolen. Die Gesamtheit aller Epipolarlinien in einer Bildebene wird *Epipolarlinienbüschel* (engl. *pencil of epipolar lines*) genannt.

In Abb. 4.5 ist eine Stereobildpaar für den konvergenten Fall zu sehen. Durch die unterschiedliche Perspektive ergeben sich verdeckte Bereiche, die nur in einer der beiden Kameras sichtbar sind. Im Folgenden werden nun die genannten Kenngrößen der Epipolargeometrie hergeleitet.



Abb. 4.5. Beispiel für eine konvergente Stereoansicht

4.3.1 Beziehung in Kamerakoordinaten

Die Kamerakoordinatensysteme stehen über eine euklidische Transformation in Beziehung, wobei nun der Ursprung in das Koordinatensystem der Kamera 1 gelegt wird.

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \mathbf{t} \quad \text{mit} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \\ \mathbf{r}_3^T \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Aus dem Lochkameramodell ergeben sich die Abbildungen eines 3-D-Punktes M in Sensorkoordinaten:

$$\tilde{\mathbf{m}}'_1 = M_1/Z_1, \quad \tilde{\mathbf{m}}'_2 = M_2/Z_2 \quad (4.6)$$

Durch Kombination von Gl. (4.5) und Gl. (4.6) erhält man eine Beziehung zwischen den beiden Abbildungen des 3-D-Punktes M mit den zwei unbekanntem Strukturparametern Z_1 und Z_2 :

$$\tilde{\mathbf{m}}'_2 = \frac{1}{Z_2} (Z_1 \mathbf{R} \tilde{\mathbf{m}}'_1 + \mathbf{t}) \quad (4.7)$$

Das Kreuzprodukt der Gleichung mit dem Vektor \mathbf{t} und weiterhin das innere Produkt (Skalarprodukt) mit $\tilde{\mathbf{m}}'_2$ sowie die Eliminierung der Strukturparameter liefern schließlich folgende Beziehung.

$$\mathbf{t} \times \tilde{\mathbf{m}}'_2 = \frac{Z_1}{Z_2} \mathbf{t} \times \mathbf{R} \tilde{\mathbf{m}}'_1 \quad (4.8)$$

$$\tilde{\mathbf{m}}_2' \cdot (\mathbf{t} \times \tilde{\mathbf{m}}_2') = \tilde{\mathbf{m}}_2'^T \mathbf{t} \times (\mathbf{R}\tilde{\mathbf{m}}_1') = 0 \quad (4.9)$$

Definiert man nun eine Zuordnung eines dreidimensionalen Vektors zu einer antisymmetrischen Matrix entsprechend Gl. (4.10), so kann das Kreuzprodukt zweier Vektoren durch das Matrixprodukt-Vektor-Produkt einer 3×3 -Matrix mit einem dreidimensionalen Vektor ausgedrückt werden.

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 0 & -t_z & t_y \\ t_z & 0 & -t_x \\ -t_y & t_x & 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit } [\mathbf{t}]_x = -[\mathbf{t}]_x^T \quad (4.10)$$

Mit dieser Schreibweise erhält man schließlich die zentrale Gleichung für die mathematische Beziehung zwischen den Abbildungen eines 3-D-Punktes in zwei Kameras, die *Epipolargleichung*.

$$\tilde{\mathbf{m}}_2'^T \mathbf{E} \tilde{\mathbf{m}}_1' = 0 \quad \text{mit } \mathbf{E} = [\mathbf{t}]_x \mathbf{R} \quad (4.11)$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn die Abbildungen in Kamera 1 und Kamera 2 korrespondierende Abbildungen eines 3-D-Punktes sind. Leider gilt nicht der Umkehrschluss, dass Abbildungen in beiden Kameras, welche die Epipolarbedingung erfüllen, auch korrespondierende Punkte sind. Dies zeigt sich daran, dass alle Punkte auf einem optischen Strahl zu einer Abbildung in einer Ansicht und zu unterschiedlichen Abbildungen in der zweiten Ansicht führen. Die Bedeutung der Epipolargleichung wird nach der folgenden Herleitung der Epipolarlinien noch deutlicher.

Die Matrix \mathbf{E} wird *Essential*-Matrix genannt und beschreibt die euklidische Transformation von Kamera 1 nach Kamera 2. Diese Matrix wurde zuerst von (Longuet-Higgins 1981) im Bereich „Struktur aus Bewegung“ (*structure from motion*) vorgestellt. Im Kapitel 8 „Die Stereoanalyse“ wird dieses Thema nochmals aufgegriffen.

Bestimmung der Epipolarlinien

Eine Linie in einer Ebene kann mit dem dreidimensionalen Vektor \mathbf{l} auf folgende Weise beschrieben werden:

$$ax + by + c = 0 \quad \text{mit } \mathbf{l} = [a, b, c]^T \quad (4.12)$$

Für Punkte auf dieser Linie muss dann entsprechend den Ausführungen in Kapitel 2 zur projektiven Ebene gelten:

$$\mathbf{p}_1^T \mathbf{l} = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{p}_2^T \mathbf{l} = 0 \quad \text{mit } \mathbf{p}_i = [x_i, y_i, 1]^T \quad (4.13)$$

Über das Kreuzprodukt beider Punkte ist eindeutig eine Linie definiert.

$$\mathbf{l} = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 \quad (4.14)$$

Mit dem Kameramodell lässt sich jeder 3-D-Punkt über den zugehörigen Bildpunkt in homogenen Koordinaten und einen entsprechenden Skalierungsfaktor λ beschreiben.

$$\lambda_1 \tilde{\mathbf{m}}'_1 = M_1 \quad \text{und} \quad \lambda_2 \tilde{\mathbf{m}}'_2 = M_2 \quad \text{mit} \quad \lambda_i \in (0, \infty) \quad (4.15)$$

Legt man den Ursprung des Weltkoordinatensystems wie gehabt in die Kamera 1, so sind die beiden Kameras über folgende euklidische Transformation verknüpft.

$$M_2 = \mathbf{R}M_1 + \mathbf{t} = \lambda_1 \mathbf{R}\tilde{\mathbf{m}}'_1 + \mathbf{t} \quad (4.16)$$

$$\lambda_2 \tilde{\mathbf{m}}'_2 = \lambda_1 \mathbf{R} \tilde{\mathbf{m}}'_1 + \mathbf{t} \quad (4.17)$$

Nun kann die Epipolarlinie in Kamera 2 über zwei ausgezeichnete Punkte berechnet werden. Dies ist zum einen der Epipol in Ansicht 2, der die Projektion des optischen Zentrums von Kamera 1 in die Bildebene 2 darstellt. Er entspricht damit einer Skalierung mit $\lambda_1 = 0$ und man erhält den Epipol dann aus Gl. (4.17), der bis auf einen Faktor dem Vektor \mathbf{t} entspricht:

$$\tilde{\mathbf{e}}'_2 = \mathbf{t} \quad (4.18)$$

Der zweite Punkt ist die Abbildung eines Punktes im Unendlichen in Ansicht 2 und dies entspricht einer Skalierung von $\tilde{\mathbf{m}}'_1$ mit $\lambda_1 = \infty$. Damit kann dann der Vektor \mathbf{t} vernachlässigt werden und man erhält die Projektion des Punktes $\tilde{\mathbf{m}}'_{2\infty}$.

$$\tilde{\mathbf{m}}'_{2\infty} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{m}}'_1 \quad (4.19)$$

Aus diesen beiden Abbildungen kann nun die Epipolarlinie in Ansicht 2 berechnet werden.

$$\mathbf{l}'_2 = \tilde{\mathbf{e}}'_2 \times \tilde{\mathbf{m}}'_{2\infty} = \mathbf{t} \times \mathbf{R}\tilde{\mathbf{m}}'_1 = \mathbf{E}\tilde{\mathbf{m}}'_1 \quad (4.20)$$

Die korrespondierende Epipolarlinie in Ansicht 1 lautet:

$$\mathbf{l}'_1 = \mathbf{E}^T \tilde{\mathbf{m}}'_2 \quad (4.21)$$

Herleitung des Epipols $\tilde{\mathbf{e}}_1'$

Aus der *Epipolargleichung* ergibt sich unter Verwendung der Gleichung für die Epipolarlinie Gl. (4.20) und Gl. (4.21), dass für jeden Punkt in einer Ansicht der korrespondierende Punkt in der anderen Ansicht auf der entsprechenden Epipolarlinie liegt. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{m}}_1'^T \mathbf{l}'_1 &= 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{l}'_1 = \mathbf{E}^T \tilde{\mathbf{m}}'_2 \\ &\text{bzw.} \\ \tilde{\mathbf{m}}_2'^T \mathbf{l}'_2 &= 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{l}'_2 = \mathbf{E} \tilde{\mathbf{m}}'_1\end{aligned}\tag{4.22}$$

Da die Epipolargleichung auch für den Epipol gültig ist und alle Epipolarlinien durch diesen Epipol verlaufen, gilt dies für alle Punkte in Ansicht 2.

$$\mathbf{E} \tilde{\mathbf{e}}_1' = [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R} \tilde{\mathbf{e}}_1' = \mathbf{0}\tag{4.23}$$

Somit kann aus der Essential-Matrix direkt der Epipol in Ansicht 1 aus dem rechtsseitigen eindimensionalen Nullraum berechnet werden. Dies entspricht einer Lösung des Gleichungssystems aus Gl. (4.23) mit drei Gleichungen für drei Unbekannte mittels Gauß-Eliminierung. Nach Division durch die dritte Komponente erhält man den Epipol in homogenen Koordinaten. Analog dazu ergibt sich aus folgender Gleichung der Epipol in Ansicht 2.

$$\mathbf{E}^T \tilde{\mathbf{e}}_2' = \mathbf{0}\tag{4.24}$$

Die Gleichung (4.23) ist erfüllt, wenn die Vektoren \mathbf{t} und $\mathbf{R} \tilde{\mathbf{e}}_1'$ in die gleiche Richtung zeigen, d.h.

$$\mathbf{R} \tilde{\mathbf{e}}_1' = \mathbf{t}\tag{4.25}$$

Damit ergibt sich der Epipol in Ansicht 1, wie folgt

$$\tilde{\mathbf{e}}_1' = \mathbf{R}^T \mathbf{t}\tag{4.26}$$

4.3.2 Beziehung in Bildkoordinaten

Der Zusammenhang zwischen normierten Kamerakoordinaten und Pixelkoordinaten wird durch die intrinsische Transformation mit der Matrix \mathbf{A} hergestellt. Sie lautet für beide Kameras:

$$\tilde{\mathbf{m}}_1 = \mathbf{A}_1 \tilde{\mathbf{m}}'_1 \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{m}}_2 = \mathbf{A}_2 \tilde{\mathbf{m}}'_2\tag{4.27}$$

Setzt man diese Beziehung in die Epipolargleichung Gl. (4.11) ein, so ergibt sich

$$\tilde{\mathbf{m}}_2^T \mathbf{A}_2^{-T} \mathbf{E} \mathbf{A}_1^{-1} \tilde{\mathbf{m}}_1 = \tilde{\mathbf{m}}_2^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{m}}_1 = 0 \quad \text{mit } \mathbf{F} = \mathbf{A}_2^{-T} \mathbf{E} \mathbf{A}_1^{-1} \quad (4.28)$$

Die 3×3 -Matrix \mathbf{F} wird *Fundamental-Matrix* genannt und beschreibt vollständig die Epipolargeometrie in Pixelkoordinaten, da sie sowohl die intrinsischen Parameter der beiden Kameras als auch die extrinsischen Parameter der euklidischen Transformation enthält. Die Gleichungen für die Epipolarlinien in beiden Ansichten lauten schließlich

$$\mathbf{l}_2 = \mathbf{F} \tilde{\mathbf{m}}_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{l}_1 = \mathbf{F}^T \tilde{\mathbf{m}}_2. \quad (4.29)$$

Die Epipole in Bildkoordinaten ergeben sich unter Einbeziehung der intrinsischen Matrizen wie folgt:

$$\tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{t} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{R}^T \mathbf{t} \quad (4.30)$$

Die Definition der Fundamental-Matrix kann unter Verwendung der Beziehung zwischen einer nicht-singulären Matrix und einem Vektor, dargestellt als antisymmetrische Matrix (siehe Anhang D.1.3), auch auf folgende Weise umformuliert werden:

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}_2^{-T} [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R} \mathbf{A}_1^{-1} = [\mathbf{A}_2 \mathbf{t}]_{\times} \mathbf{A}_2 \mathbf{R} \mathbf{A}_1^{-1} \quad \text{mit} \quad [\mathbf{A}_2 \mathbf{t}]_{\times} \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2^{-T} [\mathbf{t}]_{\times} \quad (4.31)$$

Unter Verwendung der Definition für den Epipol in Ansicht 2 ergibt sich schließlich:

$$\mathbf{F} = [\tilde{\mathbf{e}}_2]_{\times} \mathbf{A}_2 \mathbf{R} \mathbf{A}_1^{-1} \quad (4.32)$$

Analog zur Betrachtung in Kamerakoordinaten gelten folgende Beziehungen für die Fundamental-Matrix und die Epipole in Bildkoordinaten:

$$\mathbf{F} \tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{F}^T \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{0} \quad (4.33)$$

Damit enthält die Epipolargeometrie, ausgedrückt durch die Fundamental-Matrix, direkt die Epipole in den Ansichten 1 und 2. Die Epipole können damit direkt aus der Fundamental-Matrix durch Lösen des rechtsseitigen Nullraumes bestimmt werden.

In Abb. 4.6 ist das Stereobildpaar eines konvergenten Stereokamerasystems dargestellt. Basierend auf der Epipolargeometrie sind für einige Bildpunkte die korrespondierenden Epipolarlinien eingezeichnet. Es ist gut zu erkennen, dass die Epipolarlinien in beiden Ansichten jeweils konvergieren und sich in den Epipolen, die außerhalb der Bildbereiche liegen, schneiden werden.

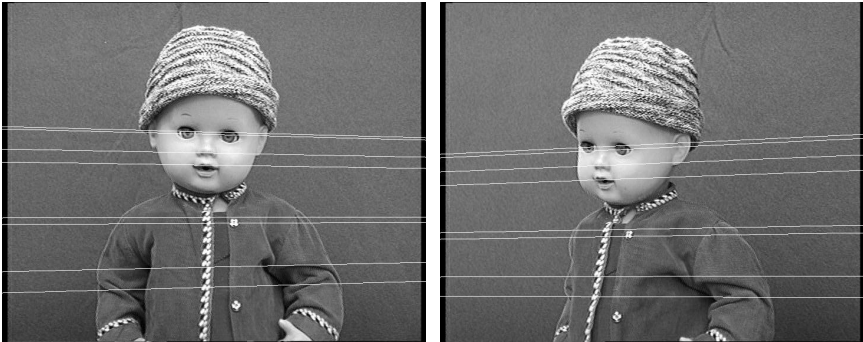


Abb. 4.6. Konvergente Ansicht mit eingezeichneten Epipolarlinien

4.4 Eigenschaften der Essential- und Fundamental-Matrix

Sowohl die Essential- als auch die Fundamental-Matrix beschreiben vollständig die geometrische Beziehung zwischen korrespondierenden Punkten in den beiden Ansichten eines Stereokamerasystems. Die Essential-Matrix beschreibt die Beziehung für Punkte in Sensorkoordinaten, d. h. die intrinsischen Parameter müssen bekannt sein, um von den Bildkoordinaten in Pixel in Sensorkoordinaten in z. B. mm transformieren zu können. In diesem Fall spricht man von dem kalibrierten Fall. Die Fundamental-Matrix hingegen liefert die Beziehung für korrespondierende Bildpunkte in Bildkoordinaten. Deshalb bezeichnet man dies auch als unkalibrierten Fall.

Die Essential-Matrix enthält fünf unbekannte Parameter, drei für die Rotation und zwei für die Translation. Die Länge des Translationsvektors, also der dritte Freiheitsgrad, kann aufgrund der aus der unterschiedlichen Tiefe der Raumpunkte resultierenden Mehrdeutigkeit nicht bestimmt werden. Die Essential-Matrix enthält zwei Bedingungen:

1. Da die Determinante der antisymmetrischen Matrix Null ist, verschwindet auch die Determinante der *Essential*-Matrix, denn nach der Determinantenregel gilt:

$$\det(\mathbf{E}) = \det([\mathbf{t}]_{\times}) \det(\mathbf{R}) = 0 \quad (4.34)$$

2. Aufgrund von $\det(\mathbf{E}) = 0$ existieren nur zwei linear unabhängige Zeilen- oder Spaltenvektoren. Damit ist der Rang der Matrix $\text{Rg}(\mathbf{E}) = 2$. Die beiden von Null verschiedenen Eigenwerte der Essential-Matrix sind gleich.

Die Fundamental-Matrix besitzt folgende Eigenschaften:

1. Da bereits die Determinante der Essential-Matrix verschwindet, gilt ebenfalls $\det(\mathbf{F}) = 0$
2. Demzufolge weist auch die Fundamental-Matrix den Rang $Rg(\mathbf{F}) = 2$ auf.

Die Fundamental-Matrix ist eine Größe des projektiven Raumes und daher nur bis auf einen Skalierungsfaktor definiert. Damit verliert diese Matrix einen Parameter. Durch die Eigenschaft $\det(\mathbf{F}) = 0$ reduziert sich die Anzahl der freien Parameter zusätzlich, wodurch schließlich von neun Matrix-Elementen der 3×3 -Matrix nur sieben Elemente voneinander unabhängig sind.

Die Anzahl der Freiheitsgrade der Essential- und der Fundamental-Matrix spielen bei der Schätzung dieser Größen, die im Kapitel 5 „Schätzung der projektiven Stereogeometrie“ behandelt wird, eine wichtige Rolle.

4.5 Die Epipolargeometrie im achsparallelen Fall

Im Abschnitt 4.2 wurde bereits der vereinfachte Fall einer achsparallelen Stereogeometrie beschrieben. In Bezug auf die Epipolarlinien und die Epipole stellt sich die Situation wie folgt dar: Da die Bildebenen parallel ausgerichtet sind, verlaufen die Schnittgeraden der Epipolarebene mit den Bildebenen, also die Epipolarlinien, alle parallel zueinander. Die Basislinie schneidet die beiden Bildebenen erst im Unendlichen, damit liegen auch die Epipole im Unendlichen (siehe Abb. 4.7).

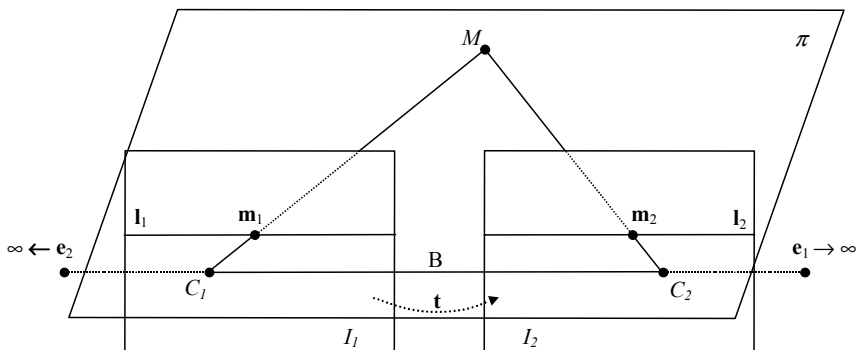


Abb. 4.7. Epipolarlinien und Epipole im achsparallelen Fall

Wie stellt sich nun in diesem Fall die Epipolargeometrie dar? Die euklidische Transformation vereinfacht sich im achsparallelen Fall zu $\mathbf{R} = \mathbf{I}$. Setzt man weiterhin voraus, dass die intrinsischen Matrizen identisch sind, d.h. $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$, so lautet die Fundamental-Matrix für den achsparallelen Fall unter Verwendung der Definition in Gl. (4.31):

$$\mathbf{F} = [\tilde{\mathbf{e}}_2]_{\times} \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^{-1} = [\tilde{\mathbf{e}}_2]_{\times} \quad (4.35)$$

Aus Gl. (4.30) kann der Epipol in Ansicht 2 mit den folgenden Koordinaten $\mathbf{e}_2 = (1, 0, 0)^T$ berechnet werden. Da die dritte Komponente Null ist, handelt es sich um einen Punkt im Unendlichen. Dies kann man sich auch sehr anschaulich vorstellen, indem man von einem konvergenten Stereosystem ausgeht und in Gedanken die beiden Bildebenen in die achsparallele Stellung dreht. Da der Epipol die Projektion des optischen Zentrums in die andere Bildebene ist, wird sich dieser immer weiter von der optischen Achse der anderen Kamera entfernen, bis er schließlich im achsparallelen Fall im Unendlichen angelangt ist. Für die Fundamental-Matrix erhält man dann folgende Matrix mit zwei Freiheitsgraden:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Diese zwei Freiheitsgrade korrespondieren mit der Lage der Epipole. Damit erhält man für einen beliebigen Punkt in Ansicht 1 folgende Epipolarlinie in Ansicht 2, die nur noch die entsprechende vertikale Koordinate des Bildpunktes enthält.

$$\mathbf{l}_2 = \mathbf{F} \tilde{\mathbf{m}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ v \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Nach der Geradendefinition

$$au + bv + c = 0, \quad \text{mit } m = -a/b \quad \text{und } d = -c/b \quad (4.38)$$

ergibt sich für diese Epipolarlinie die Steigung $m = 0$ und der Achsenabschnitt $d = v$, also die erwartete horizontale Epipolarlinie mit der gleichen v -Koordinate des Bildpunktes in der anderen Bildebene.

4.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die geometrische Beziehung zwischen zwei Kameras mathematisch hergeleitet. Das Resultat ist die Epipolargleichung, welche die Abbildungen in beiden Ansichten mit der Geometrie zwischen beiden Kameras verknüpft. Der wesentliche Nutzen für die praktische Anwendung lässt sich aus dieser Gleichung ableiten und besteht darin, dass korrespondierende Bildpunkte in einer Ansicht auf der entsprechenden Epipolarlinie in der anderen Ansicht liegen müssen. Für die Tiefenanalyse und die sich daraus ergebende Korrespondenzanalyse reduziert sich damit der Suchraum auf eine Dimension entlang dieser Epipolarlinie. In Kapitel 8 „*Die Stereoanalyse*“ wird vertiefend auf diesen Aspekt eingegangen. Da die Korrespondenzanalyse in achsparallelen Stereosystemen wesentlich einfacher zu implementieren ist, stellt sich die Frage, ob man ein konvergentes Kamerasystem künstlich in ein achsparalleles System überführen kann? Die Frage kann positiv beantwortet werden und entsprechende Verfahren werden im Kapitel 7 „*Die Rektifikation*“ vorgestellt.

Bisher wurde nur auf die Definition der Fundamental-Matrix und nicht auf die Bestimmung derselben eingegangen. Entsprechend der Definition kann bei vorliegenden intrinsischen Parametern beider Kameras und der extrinsischen Parameter zwischen den Kameras die Fundamental-Matrix explizit berechnet werden. Dies wird als kalibrierter Fall bezeichnet. Die Epipolargleichung bietet jedoch zusätzlich die Möglichkeit, die Epipolargeometrie nur aus vorliegenden Punktkorrespondenzen zu bestimmen. Da diese Aufgabenstellung eine Reihe von Aspekten der linearen und nicht-linearen Optimierung enthält, wird diesem Thema das Kapitel 5 „*Die Schätzung der projektiven Stereogeometrie*“ gewidmet. Weiterführende Literatur zur Epipolargeometrie findet man in (Xu u. Zhang 1996).

- Die Basislinie ist die Verbindung zwischen den Projektionszentren beider Kameras.
- Die Epipole sind die projizierten Abbildungen der optischen Zentren in der Bildebene der jeweils anderen Kamera.
- Die Epipolarlinien sind die Schnittgeraden der Epipolarebene, die durch die beiden optischen Zentren und einen 3-D-Punkt im Raum aufgespannt wird.
- Korrespondierende Abbildungen eines 3-D-Punktes liegen auf der entsprechenden Epipolarlinie in der Bildebene der anderen Kamera.